

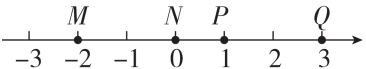


数学试题

满分 120 分. 考试时长 120 分钟.

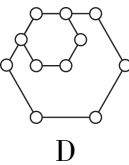
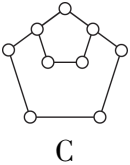
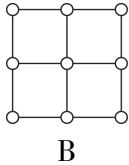
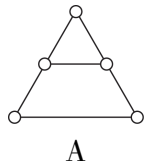
一、选择题: 本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 每小题只有一个选项符合题目要求.

1. 如图, 数轴上表示-2 的点是 ( )



A.  $M$                       B.  $N$                       C.  $P$                       D.  $Q$

2. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ( )



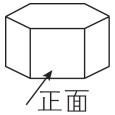
A

B

C

D

3. 我国“深蓝 2 号”大型智能深海养殖网箱的主体是一个正六棱柱, 其示意图的主视图是 ( )



A



B



C



D

4. 好客山东以其宽厚仁德的人文情怀、风景秀丽的河海山川吸引了来自世界各地的朋友, 据统计, 山东省 2024 年全年接待游客超 9 亿人次. 数据“9 亿”用科学记数法表示为 ( )

A.  $9\times 10^7$                       B.  $0.9\times 10^8$                       C.  $9\times 10^8$                       D.  $0.9\times 10^9$

5. 已知  $a\neq 0$ , 则下列运算正确的是 ( )

A.  $-2a+3a=5a$                       B.  $(-2a^3)^2=4a^6$                       C.  $a^2-a=a$                       D.  $a^6\div a^2=a^3$

6. 某班学生到山东省博物馆参加研学活动. 博物馆为同学们准备了以镇馆之宝“亚醜钺”“蛋壳黑陶杯”“颂簋”为主题的三款文创产品, 每位同学可从中随机抽取一个作为纪念品. 若抽到每一款的可能性相等, 则甲、乙两位同学同时抽到“亚醜钺”的概率是 ( )

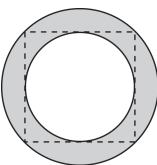
A.  $\frac{1}{9}$                       B.  $\frac{1}{6}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{2}{3}$

7. 明代数学家吴敬的《九章算法比类大全》中有一个“哪吒夜叉”问题, 大意是有 3 个头 6 只手的哪吒若干, 有 1 个头 8 只手的夜叉若干, 两方交战, 共有 36 个头, 108 只手. 问哪吒、夜叉各有多少? 设哪吒有  $x$  个, 夜叉有  $y$  个, 则根据条件所列方程组为 ( )

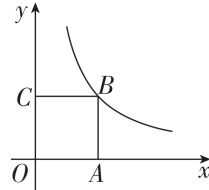
A.  $\begin{cases} x+3y=36, \\ 8x+6y=108 \end{cases}$                       B.  $\begin{cases} x+3y=36, \\ 6x+8y=108 \end{cases}$                       C.  $\begin{cases} 3x+y=36, \\ 8x+6y=108 \end{cases}$                       D.  $\begin{cases} 3x+y=36, \\ 6x+8y=108 \end{cases}$

8. 在中国古代文化中, 玉璧寓意宇宙的广阔与秩序, 也经常被视为君子修身齐家的象征. 下图是某玉璧的平面示意图, 由一个正方形的内切圆和外接圆组成. 已知内切圆的半径是 2, 则图中阴影部分的面积是 ( )

A.  $\pi$                       B.  $2\pi$                       C.  $3\pi$                       D.  $4\pi$



(第 8 题图)

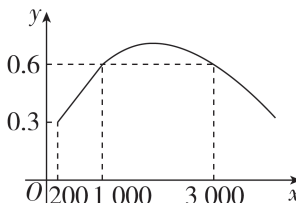


(第 9 题图)

9. 如图, 在平面直角坐标系中,  $A, C$  两点在坐标轴上, 四边形  $OABC$  是面积为 4 的正方形. 若函数  $y=\frac{k}{x}(x>0)$  的图象经过点  $B$ , 则满足  $y\geq 2$  的  $x$  的取值范围为 ( )

A.  $0<x\leq 2$                       B.  $x\geq 2$                       C.  $0<x\leq 4$                       D.  $x\geq 4$

10. 在水分、养料等条件一定的情况下, 某植物的生长速度  $y$  (厘米/天) 和光照强度  $x$  (勒克斯) 之间存在一定关系. 在低光照强度范围 ( $200\leq x<1\,000$ ) 内,  $y$  与  $x$  近似成一次函数关系; 在中高光照强度范围 ( $x\geq 1\,000$ ) 内,  $y$  与  $x$  近似成二次函数关系. 其部分图象如图所示. 根据图象, 下列结论正确的是 ( )



A. 当  $x\geq 1\,000$  时,  $y$  随  $x$  的增大而减小  
B. 当  $x=2\,000$  时,  $y$  有最大值  
C. 当  $y\geq 0.6$  时,  $x\geq 1\,000$   
D. 当  $y=0.4$  时,  $x=600$

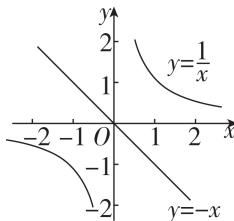
二、填空题: 本题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分.

11. 写出使分式  $\frac{1}{2x-3}$  有意义的  $x$  的一个值\_\_\_\_\_.

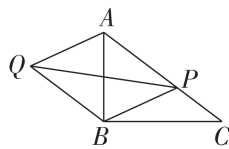
12. 在平面直角坐标系中, 将点  $P(3, 4)$  向下平移 2 个单位长度, 得到的对应点  $P'$  的坐标是\_\_\_\_\_.

13. 若关于  $x$  的一元二次方程  $x^2+4x-m=0$  有两个不相等的实数根, 则实数  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

14. 取直线  $y=-x$  上一点  $A_1(x_1, y_1)$ , ①过点  $A_1$  作  $x$  轴的垂线, 交  $y=\frac{1}{x}$  于点  $A_2(x_2, y_2)$ ; ②过点  $A_2$  作  $y$  轴的垂线, 交  $y=-x$  于点  $A_3(x_3, y_3)$ ; 如此循环进行下去. 按照上面的操作, 若点  $A_1$  的坐标为  $(1, -1)$ , 则点  $A_{2\,025}$  的坐标是\_\_\_\_\_.



(第 14 题图)



(第 15 题图)

15. 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ABC=90^\circ, AB=6, BC=8$ . 点  $P$  为边  $AC$  上异于  $A$  的一点, 以  $PA, PB$  为邻边作  $\square PAQB$ , 则线段  $PQ$  的最小值是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 本题共 8 小题, 共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (8 分)

(1) 计算:  $\left|-\frac{1}{3}\right|\times\sqrt{9}+\pi^0$ ;

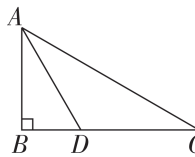
(2) 先化简, 再求值:  $(x^2-1)\left(\frac{1}{x+1}+1\right)$ , 其中  $x=2$ .

17. (8 分)

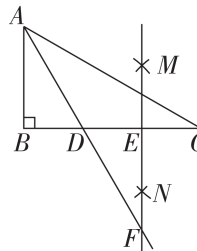
在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ABC=90^\circ, \angle ACB=30^\circ, \angle BAC$  的平分线  $AD$  交  $BC$  于点  $D$ . 如图(1).

(1) 求  $\angle ADC$  的度数;

(2) 已知  $AB=3$ , 分别以  $C, D$  为圆心, 以大于  $\frac{1}{2}CD$  的长为半径作弧, 两弧相交于点  $M, N$ , 作直线  $MN$  交  $BC$  于点  $E$ , 交  $AD$  的延长线于点  $F$ . 如图(2), 求  $DF$  的长.



图(1)



图(2)

18. (8 分)

山东省在能源绿色低碳转型过程中, 探索出一条“以储调绿”的能源转型路径. 某地结合实际情况, 建立了一座圆柱形蓄水池, 通过蓄水发电实现低峰蓄能、高峰释能, 助力能源转型.

已知本次注水前蓄水池的水位高度为 5 米, 注水时水位高度每小时上升 6 米.

(1) 请写出本次注水过程中, 蓄水池的水位高度  $y$  (米) 与注水时间  $x$  (小时) 之间的关系式;

(2) 已知蓄水池的底面积为 0.4 万平方米, 每立方米的水可供发电 0.3 千瓦时, 求注水多长时间可供发电 4.2 万千瓦时.

19. (10 分)

在 2025 年全国科技活动周期间,某校科技小组对甲、乙两个水产养殖基地水体的 pH 值进行了检测,并对一天(24 小时)内每小时的 pH 值进行了整理、描述及分析.

【收集数据】

甲基地水体的 pH 值数据:

7. 27,7. 28,7. 34,7. 35,7. 36,7. 51,7. 53,7. 67,7. 67,7. 67,7. 67,7. 81,7. 81,7. 88,7. 91,8. 01,8. 02,8. 03,8. 07,8. 16,8. 17,8. 23,8. 26,8. 26.

乙基地水体的 pH 值数据:

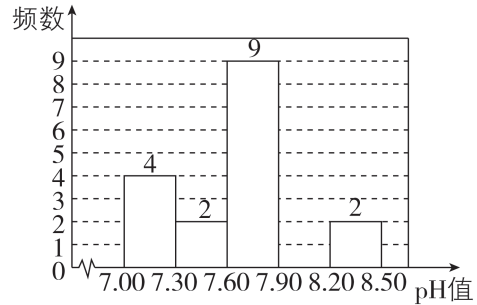
7. 11,7. 12,7. 14,7. 25,7. 36,7. 52,7. 63,7. 67,7. 69,7. 75,7. 77,7. 77,7. 81,7. 84,7. 89,8. 01,8. 12,8. 13,8. 14,8. 16,8. 17,8. 18,8. 20,8. 21.

【整理数据】

	$7.00\leqslant x<7.30$	$7.30\leqslant x<7.60$	$7.60\leqslant x<7.90$	$7.90\leqslant x<8.20$	$8.20\leqslant x\leqslant 8.50$
甲	2	5	7	7	3
乙	4	2	9	$a$	2

【描述数据】

乙基地水体pH值数据的频数分布直方图



【分析数据】

	平均数	众数	中位数	方差
甲	7. 79	$b$	7. 81	0. 10
乙	7. 78	7. 77	$c$	0. 13

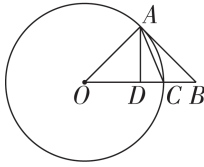
根据以上信息解决下列问题:

- (1) 补全频数分布直方图;
- (2) 填空: $b=$ \_\_\_\_\_, $c=$ \_\_\_\_\_;
- (3) 请判断甲、乙哪个基地水体的 pH 值更稳定,并说明理由;
- (4) 已知两基地对水体 pH 值的日变化量(pH 值最大值与最小值的差)要求为 0. 5~1,分别判断并说明该日两基地的 pH 值是否符合要求.

20. (10 分)

如图,在 $\triangle OAB$  中,点  $A$  在 $\odot O$  上,边  $OB$  交 $\odot O$  于点  $C$ , $AD\perp OB$  于点  $D$ , $AC$  是 $\angle BAD$  的平分线.

- (1) 求证: $AB$  为 $\odot O$  的切线;
- (2) 若 $\odot O$  的半径为 2, $\angle AOB=45^{\circ}$ ,求  $CB$  的长.



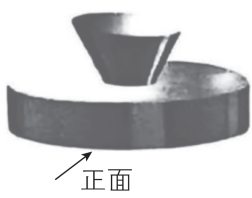
21. (9 分)

【问题情境】

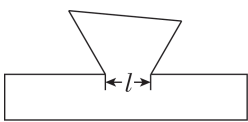
2025 年 5 月 29 日“天问二号”成功发射,开启了小行星伴飞取样探测的新篇章. 某校航天兴趣小组受到鼓舞,制作了一个航天器模型,其中某个部件使用 3D 打印完成,如图(1).

【问题提出】

部件主视图如图(2)所示,由于  $l$  的尺寸不易直接测量,需要设计一个可以得到  $l$  的长度的方案,以检测该部件中  $l$  的长度是否符合要求.



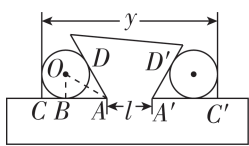
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)

【方案设计】

兴趣小组通过查阅文献,提出了钢柱测量法.

测量工具:游标卡尺、若干个底面圆半径相同的钢柱(圆柱).

操作步骤:如图(3),将两个钢柱平行放在部件合适位置,使得钢柱与部件紧密贴合. 示意图如图(4), $\odot O$  分别与  $AC,AD$  相切于点  $B,D$ . 用游标卡尺测量出  $CC'$  的长度  $y$ .

【问题解决】

已知 $\angle CAD=\angle C'A'D'=60^{\circ}$ , $l$  的长度要求是 1. 9 cm~2. 1 cm.

- (1) 求 $\angle BAO$  的度数;
- (2) 已知钢柱的底面圆半径为 1 cm,现测得  $y=7.52$  cm. 根据以上信息,通过计算说明该部件  $l$  的长度是否符合要求. (参考数据: $\sqrt{3}\approx 1.73$ )

【结果反思】

(3) 本次实践过程借助圆柱将不可测量的长度转化为可测量的长度,能将圆柱换成其他几何体吗? 如果能, 写出一个;如果不能,说明理由.

22. (11 分) 已知二次函数  $y=x(x-a)+(x-a)(x-b)+x(x-b)$ , 其中  $a,b$  为两个不相等的实数.

- (1) 当  $a=0,b=3$  时,求此函数图象的对称轴;
- (2) 当  $b=2a$  时,若该函数在  $0\leqslant x\leqslant 1$  时, $y$  随  $x$  的增大而减小;在  $3\leqslant x\leqslant 4$  时, $y$  随  $x$  的增大而增大,求  $a$  的取值范围;
- (3) 若点  $A(a,y_1),B(\frac{a+b}{2},y_2),C(b,y_3)$  均在该函数的图象上,是否存在常数  $m$ ,使得  $y_1+my_2+y_3=0$ ? 若存在,求出  $m$  的值;若不存在,说明理由.

23. (11 分)

【图形感知】

如图(1),在四边形  $ABCD$  中,已知 $\angle BAD=\angle ABC=\angle BDC=90^{\circ}$ , $AD=2,AB=4$ .

- (1) 求  $CD$  的长;

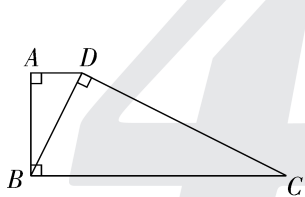
【探究发现】

老师指导同学们对图(1)所示的纸片进行了折叠探究.

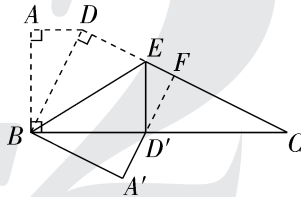
在线段  $CD$  上取一点  $E$ ,连接  $BE$ . 将四边形  $ABED$  沿  $BE$  翻折得到四边形  $A'BED'$ ,其中  $A',D'$  分别是  $A,D$  的对应点.

- (2) 其中甲、乙两位同学的折叠情况如下:

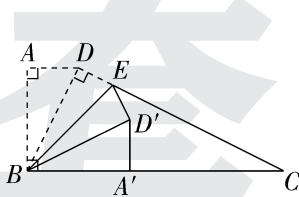
- ①甲:点  $D'$  恰好落在边  $BC$  上,延长  $A'D'$  交  $CD$  于点  $F$ ,如图(2). 判断四边形  $DBA'F$  的形状,并说明理由;
- ②乙:点  $A'$  恰好落在边  $BC$  上,如图(3). 求  $DE$  的长.
- (3) 如图(4),连接  $DD'$  交  $BE$  于点  $P$ ,连接  $CP$ . 当点  $E$  在线段  $CD$  上运动时,线段  $CP$  是否存在最小值? 若存在,直接写出;若不存在,说明理由.



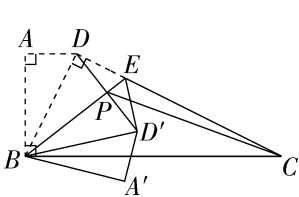
图(1)



图(2)



图(3)



图(4)